Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux factoriels, corps des fractions et caractéristique - TD 8

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ n'est pas factoriel de 2 façons.

2. Donner un exemple d'un $p \in R$ tel que p est irréductible et (p) n'est pas maximal.

3. Soit R un anneau factoriel et $f(x) \in R[x]$. Montrer que $f(x)$ est irréductible dans $R[x]$ si et seulement si $uf(x)$ est irréductible dans $R[x]$ pour tout $u \in R^{\times}$.

4. Soit R un anneau factoriel et F son corps des fractions. Un polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ s'appelle *primitif* si $\mathrm{pgcd}(a_i) = 1$. Soit $f(x) \in R[x]$. Si $f(x)$ est irréductible dans $R[x]$, alors $f(x)$ est irréductible dans $F[x]$. La réciproque est vraie si et seulement si $f(x)$ est primitif.

5. Critère d'Eisenstein : Soient R un anneau factoriel et et $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ avec $a_n \neq 0_R$. S'il existe un élément irréductible $p \in R$ tel que

(i) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,

(ii) p ne divise pas a_n, et

(iii) p^2 ne divise pas a_0,

alors $f(x)$ est irréductible dans $F[x]$ où F est le corps des fractions de R. Si en plus $f(x)$ est primitif, $f(x)$ est irréductible dans $R[x]$.

6. Montrer que le corps des fractions de $\mathbb{Z}[i]$ est $\mathbb{Q}[i]$.

7. Pourquoi on ne peut pas définir le corps des fractions d'un anneau non-intègre ?

8. Soit R est un anneau intègre et $F := \mathrm{Frac}(R)$. Montrer que $\mathrm{Frac}(R[x]) = R(x) = F(x)$.

9. Si R est un anneau avec $\mathrm{car}R = p$ où p est un nombre premier, alors

$$(a+b)^p = a^p + b^p \quad \text{et} \quad (a-b)^p = a^p - b^p$$

pour tous $a, b \in R$.

10. Si R est un anneau intègre avec $\mathrm{car}R = p$ où p est un nombre premier, alors l'application (de Frobenius) $F : R \to R$, $a \mapsto a^p$ est un monomorphisme. De plus, si R est fini, alors F est un isomorphisme.